Aufgabenstellungen zur elementaren Dreiecksgeometrie

Maria Koth, Universität Wien

In diesem Beitrag wird eine Aufgabensequenz zur Dreiecksgeometrie (samt möglichen Begründungsskizzen zu den einzelnen Aufgaben) vorgestellt. Dabei werden einem Dreieck ABC vier weitere Dreiecke $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ und $A_4B_4C_4$ zugeordnet, und die vielfältigen Lage- und Schnittbeziehungen dieser vier Dreiecke betrachtet.

Ausgangspunkt jedes Arbeitsauftrags ist eine Konstruktionsaufgabe, die dem Kennen lernen der jeweiligen Problemstellung dient, und gleichzeitig zum Aufstellen von Vermutungen über bestimmte Dreieckseigenschaften anregen soll. Die Schülerinnen und Schüler sollen Vermutungen aufstellen, und diese Vermutungen anschließend auch begründen.

Die Fragestellungen sind so gewählt, dass eine Begründung mit Hilfe von Kongruenz- und Ähnlichkeitssätzen bzw. mit Hilfe von in früheren Schritten der Sequenz bereits bewiesenen Resultaten möglich ist.

0. Argumentationsbasis

Eine Schwierigkeit im Zusammenhang mit Begründungsaufgaben in der Geometrie besteht darin, dass es oft nicht einfach ist, eine klare Argumentationsbasis vorzugeben. Unter einer Argumentationsbasis soll dabei die Gesamtheit der Definitionen und Sätze verstanden werden, auf die man sich in seinen Begründungen beruft.

Für die hier beschriebene Aufgabensequenz werden nur die grundlegenden Begriffe Höhenlinie, Seitensymmetrale, Winkelsymmetrale und Schwerlinie sowie Kongruenz und Ähnlichkeit von Dreiecken als bekannt vorausgesetzt. (Unter ähnlichen Dreiecken wollen wir dabei Dreiecke verstehen, die in allen drei Winkeln übereinstimmen.)

Unsere Argumentationsbasis soll außerdem den Parallelwinkelsatz (Gleichliegende Parallelwinkel sind gleich groß.), die vier Kongruenzsätze (SSS, WSW, SWS und SSW_g) sowie zwei grundlegende Sätze über ähnliche Dreiecke umfassen. (Satz 1: Zwei Dreiecke sind genau dann ähnlich, wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und der Größe des eingeschlossenen Winkels übereinstimmen. Satz 2: In ähnlichen Dreiecken gilt: Entsprechende Längenstücke stehen im selben Verhältnis.)

Diese Argumentationsbasis ermöglicht es, die im Folgenden skizzierten Schnitt- und Lagebeziehungen von Dreiecken zu begründen, wobei jeder Schritt der Sequenz die vorhandene Argumentationsbasis um das jeweils neu gewonnene Resultat erweitern soll.

1. Existenz des Umkreis- und des Inkreismittelpunktes

Arbeitsauftrag 1:
Konstruiere ein beliebiges Dreieck ABC und die beiden Seitensymmetralen m_{AB} und m_{BC}. Begründe, dass auch die dritte Seitensymmetrale m_{AC} des Dreiecks durch den Schnittpunkt von m_{AB} und m_{BC} verläuft.

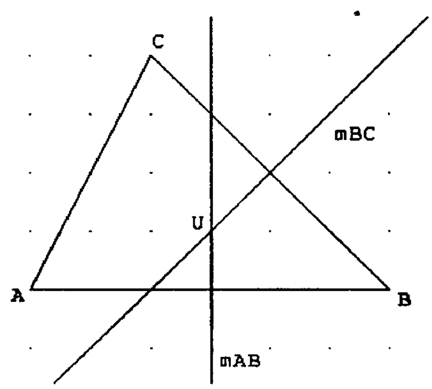


Abb. 1: Umkreismittelpunkt U

Für den Schnittpunkt U der Seitensymmetralen m_{AB} und m_{BC} gilt:

$U \in m_{AB} \Rightarrow \overline{UA} = \overline{UB}$

$U \in m_{BC} \Rightarrow \overline{UB} = \overline{UC}$

$\overline{UA} = \overline{UB} \wedge \overline{UB} = \overline{UC} \Rightarrow \overline{UA} = \overline{UC}$

Aber $\overline{UA} = \overline{UC} \Rightarrow U \in m_{AC}$

Genauso folgt unmittelbar aus der Definition des Begriffes Winkelsymmetrale, dass auch die drei Winkelsymmetralen eines Dreiecks einen gemeinsamen Schnittpunkt I haben:

Arbeitsauftrag 2:
Konstruiere ein beliebiges Dreieck ABC und die beiden Winkelsymmetralen w_α und w_β. Begründe, dass auch die dritte Winkelsymmetrale w_γ des Dreiecks durch den Schnittpunkt von w_α und w_β verläuft.

2. Die Ankreismittelpunkte des Dreiecks

Ergänzend kann man die drei Außenwinkelsymmetralen des Dreiecks betrachten:

Arbeitsauftrag 3:
Konstruiere ein beliebiges Dreieck ABC und die beiden Außenwinkelsymmetralen $w_{\alpha'}$ und $w_{\beta'}$. Begründe, dass die Innenwinkelsymmetrale w_γ des Dreiecks durch den Schnittpunkt I_c von $w_{\alpha'}$ und $w_{\beta'}$ verläuft.

Analog zum Inkreismittelpunkt I ist auch I_c von den Trägergeraden aller drei Dreiecksseiten gleich weit entfernt, und ist daher Mittelpunkt eines Kreises, der alle drei Trägergeraden berührt. Man nennt diesen Kreis einen **Ankreis des Dreiecks ABC**.

Die beiden anderen Ankreismittelpunkte I_a und I_b erhält man als Schnittpunkte der drei Winkelsymmetralen w_α, w_β' und w_γ' bzw. als Schnittpunkte von w_α', w_β und w_γ'.

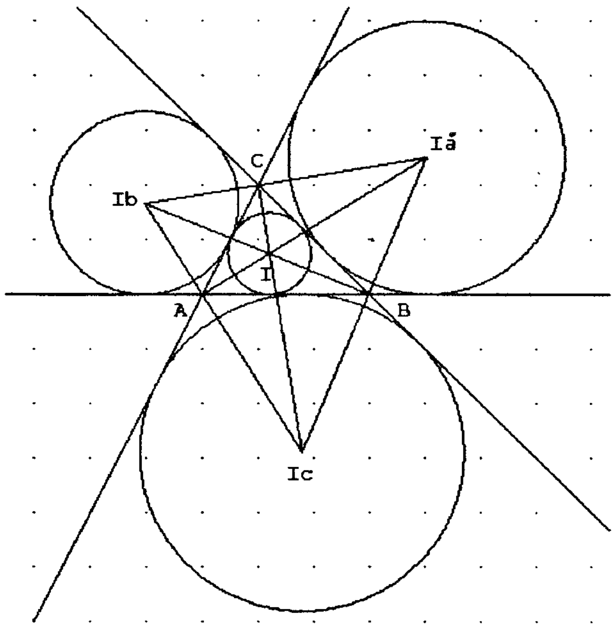


Abb. 2: Der Inkreis und die drei Ankreise des Dreiecks ABC

3. Außendreieck und Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC

Arbeitsauftrag 4:
Konstruiere ein beliebiges Dreieck ABC. Parallelverschieben der drei Dreiecksseiten durch den jeweils gegenüberliegenden Eckpunkt ergibt das sogenannte Außendreieck $A_1B_1C_1$ *(siehe Abbildung 3).*

Welche Zusammenhänge zwischen den Dreiecken ABC, BAC_1, BA_1C, B_1AC *und* $A_1B_1C_1$ *fallen dir auf? Vergleiche die Seitenlängen, die Größen der Winkel, die gegenseitige Lage der Seiten, und begründe deine Vermutungen!*

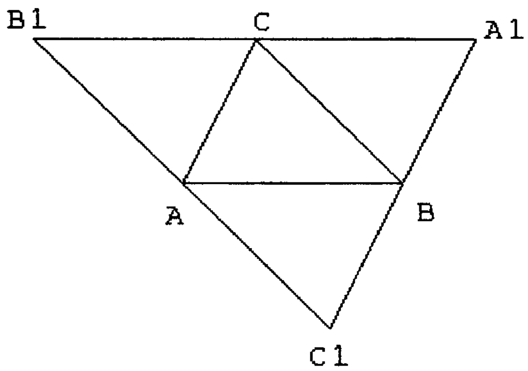


Abb.3: Dreieck ABC und Außendreieck $A_1B_1C_1$

Jedes der Dreiecke BAC_1, CBA_1 und ACB_1 hat mit dem Dreieck ABC eine Seite und die Größe der beiden anliegenden Winkel gemeinsam und ist daher nach dem WSW-Satz zum Dreieck ABC kongruent.

Daher ist insbesondere auch $\overline{B_1A} = \overline{AC_1} = \overline{CB}$, $\overline{C_1B} = \overline{BA_1} = \overline{AC}$ und $\overline{B_1C} = \overline{CA_1} = \overline{AB}$, das heißt, die Punkte A, B, C sind die Seitenmittelpunkte des Dreiecks $A_1B_1C_1$.

Da die Seiten der Dreiecke $A_1B_1C_1$ und ABC paarweise parallel zueinander liegen, sind die Winkel dieser Dreiecke paarweise gleich groß, und die Dreiecke zueinander ähnlich. Da A, B und C die Seitenmittelpunkte des Dreiecks $A_1B_1C_1$ sind, stehen einander entsprechende Längenstücke der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ im Verhältnis 1:2.

Nach dem Untersuchen dieser Kongruenz- und Ähnlichkeitsbeziehungen könnten die Höhenlinien des Dreiecks ABC betrachtet werden:

Arbeitsauftrag 5:
Zeichne nun zwei Höhenlinien des Dreiecks ABC ein.

Welche Bedeutung kommt diesen Höhenlinien im Dreieck $A_1B_1C_1$ zu? Was kann daraus für die gegenseitige Lage der drei Höhenlinien eines Dreiecks gefolgert werden?

Da A, B und C die Seitenmittelpunkte des Dreiecks $A_1B_1C_1$ sind, entsprechen den Höhenlinien von ABC die Seitensymmetralen von $A_1B_1C_1$ (siehe Abbildung 4). Setzt man nun als bekannt voraus (siehe Schritt 1), dass die drei Seitensymmetralen eines Dreiecks einander im Umkreismittelpunkt dieses Dreiecks schneiden, so kann aus der Existenz des Umkreismittelpunktes U_1 des Dreiecks $A_1B_1C_1$ auf die Existenz des Höhenschnittpunktes H des Dreiecks ABC geschlossen werden.

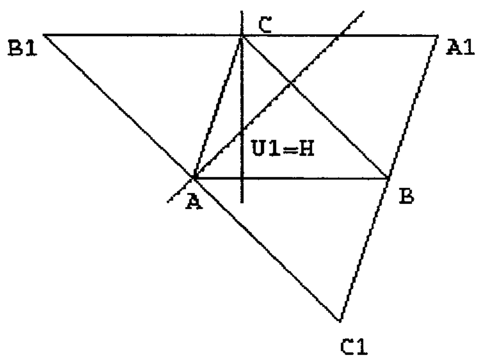


Abb. 4: Den Seitensymmetralen von $A_1B_1C_1$ entsprechen die Höhenlinien von ABC

In diesem Schritt soll also erkannt und begründet werden,

- dass die Dreiecke ABC, BAC_1, BA_1C und B_1AC zueinander kongruent sind,
- dass die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ zueinander ähnlich sind, wobei die Seiten paarweise parallel zueinander liegen und sich entsprechende Längen wie 1: 2 verhalten,
- dass die Punkte A, B, C die Seitenmittelpunkte des Dreiecks $A_1B_1C_1$ sind,
- dass die drei Höhenlinien jedes Dreiecks ABC einander in einem Punkt H schneiden,
- und dass für die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ die Lagebeziehung $U_1 = H$ erfüllt ist (wobei Umkreismittelpunkt und Höhenschnittpunkt des Dreiecks $A_1B_1C_1$ mit U_1 und H_1 bezeichnet werden).

4. Existenz des Schwerpunkts

Arbeitsauftrag6:
Konstruiere ein Dreieck ABC sowie sein zugehöriges Außendreieck $A_1B_1C_1$. Zeichne die Verbindungsstrecke AA_1 der gegenüberliegenden Eckpunkte A und A_1 dieser Dreiecke.

Welche Bedeutung kommt der Strecke AA_1 im Dreieck $A_1B_1C_1$ zu?
In welchem Punkt X schneidet die Strecke AA_1 die Dreiecksseite BC? Welche Bedeutung kommt daher der Strecke AA_1 im Dreieck ABC zu?

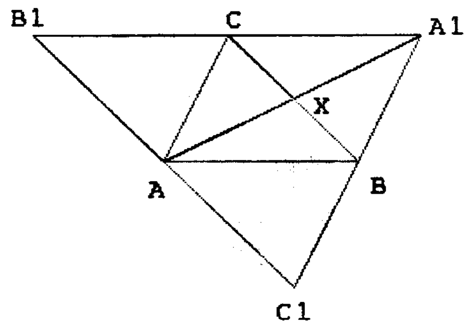


Abb. 5: Ähnliche Dreiecke XA_1C und AA_1B_1

Da A der Mittelpunkt der Seite B_1C_1 ist (siehe Schritt3), ist AA_1 Schwerlinie des Dreiecks $A_1B_1C_1$.

Die Dreiecke XA_1C und AA_1B_1 haben gleich große Winkel und sind daher ähnlich. Weil nun $\overline{B_1A_1} = 2 \cdot \overline{AB} = 2 \cdot \overline{CA_1}$ ist (siehe Schritt3), muss auch $\overline{B_1A} = 2 \cdot \overline{CX}$ sein. Also ist X der Mittelpunkt der Seite BC, d.h. AA_1 ist gleichzeitig Schwerlinie des Dreiecks ABC.

Arbeitsauftrag7:
Konstruiere ein Dreieck ABC und sein zugehöriges Außendreieck $A_1B_1C_1$. Zeichne zwei Verbindungsstrecken AA_1 und BB_1 einander gegenüberliegenden Eckpunkte dieser Dreiecke.

Der Schnittpunkt S der Strecken AA_1 und BB_1 legt zwei Dreiecke ABS und A_1B_1S fest. Begründe, dass diese Dreiecke zueinander ähnlich sind.

Was kann demnach über die Lage dieses Schnittpunkts S ausgesagt werden?
Was kann daraus für die Lage des Schnittpunkts der beiden Strecken AA_1 und CC_1 bzw. der Strecken BB_1 und CC_1 gefolgert werden?

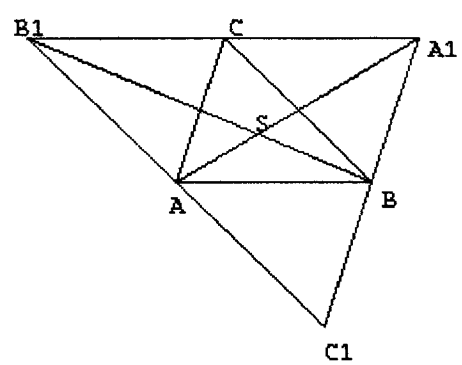


Abb. 6: Die Dreiecke ABS und A_1B_1S sind ähnlich mit Längenverhältnis 1:2

Auch die Dreiecke ABS und A_1B_1S stimmen in allen drei Winkeln überein, und sind daher ähnlich.

Daher stehen alle entsprechenden Längenstücke dieser Dreiecke im selben Verhältnis, und da $\overline{B_1A_1} = 2 \cdot \overline{AB}$ ist, muss auch $\overline{B_1S} = 2 \cdot \overline{SB}$ und $\overline{A_1S} = 2 \cdot \overline{SA}$ gelten.

Somit hat der Schnittpunkt S der Schwerlinien AA_1 und BB_1 die Eigenschaft, jede der Strecken im Verhältnis 1:2 zu teilen.

Analog gilt auch für den Schnittpunkt der beiden Schwerlinien AA_1 und CC_1 (bzw. BB_1 und CC_1), dass dieser die Schwerlinien im Verhältnis 1:2 teilt. Daraus folgt aber, dass alle drei Schwerlinien eines Dreiecks durch einen gemeinsamen Punkt S verlaufen. Man nennt S den Schwerpunkt des Dreiecks.

In diesem Schritt soll also gezeigt werden,

- dass die Trägergeraden einander entsprechender Schwerlinien der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ paarweise zusammenfallen,
- dass je zwei Schwerlinien eines Dreiecks einander im Verhältnis 2:1 teilen,
- dass die drei Schwerlinien eines Dreiecks durch einen gemeinsamen Punkt S (den Schwerpunkt) verlaufen,
- und dass die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ denselben Schwerpunkt besitzen.

5. Lagebeziehungen zwischen U, H und S – die eulersche Gerade

Arbeitsauftrag 8: *Unter welcher Bedingung fällt die Höhenlinie h_c mit der entsprechenden Seitensymmetrale m_{AB} bzw. mit der entsprechenden Schwerlinie s_c zusammen?* *Für welche Dreiecke gilt $U = H$ bzw. $U = S$ bzw. $H = S$ bzw. sogar $U = H = S$?*

Die Höhenlinie h_c schneidet die Trägergerade der Seite c in einem Punkt H_c. Ist $H_c = C_2$, so fällt h_c mit der Seitensymmetrale m_{AB} und auch mit der Schwerlinie s_c zusammen. Andernfalls sind h_c und m_{AB} voneinander verschiedene Parallele, und die Schwerlinie s_c schneidet m_{AB} in C_2 und h_c in C.
Die Bedingung $H_c = C_2$ ist genau dann erfüllt, wenn die Dreiecke AH_cC und BH_cC zueinander kongruent sind, d.h. genau dann, wenn $\overline{AC} = \overline{BC}$ ist.

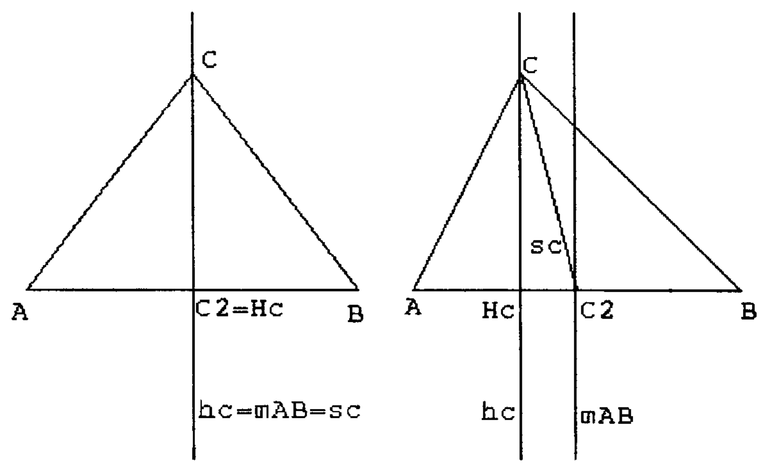


Abb. 7: Nur wenn $C_2 = H_c$ ist, gilt $h_c = m_{AB} = s_c$

Ist das Dreieck ABC gleichseitig, so fällt daher jede der drei Höhelinien mit der zugehörigen Seitensymmetrale und auch mit der zugehörigen Schwerlinie zusammen. Also ist in diesem Fall U = H = S.

Andernfalls gibt es mindestens zwei verschieden lange Seiten, zum Beispiel $\overline{AC} \neq \overline{BC}$. In diesem Fall ist $h_c \parallel m_{AB}$ und daher $U \neq H$, und die Schwerlinie s_c schneidet h_c in C und m_{AB} in C_2. Da der Schwerpunkt S die Strecke CC_2 im Verhältnis 2:1 teilt (siehe Schritt 4), ist $S \neq C$ und $S \neq C_2$. Also kann S weder mit U noch mit H zusammenfallen. In jedem nicht-gleichseitigen Dreieck sind daher U, H und S drei voneinander verschiedene Punkte.

Arbeitsauftrag 9: *Konstruiere ein nicht-gleichseitiges Dreieck ABC, seinen Höhenschnittpunkt H, seinen Umkreismittelpunkt U sowie den Mittelpunkt C_2 der Dreiecksseite AB.* *Die Strecke UH schneidet die Schwerlinie CC_2 in einem Punkt X. Begründe, dass die beiden Dreiecke HCX und UC_2X zueinander ähnlich sind! In welchem Verhältnis stehen die Seitenlängen dieser Dreiecke?* *Welche Bedeutung kommt daher dem Punkt X im Dreieck ABC zu, und welche Lagebeziehung besteht zwischen U, H und X?* *Was kann daraus für die Lage der Punkte U_1 und H_1 gefolgert werden?*

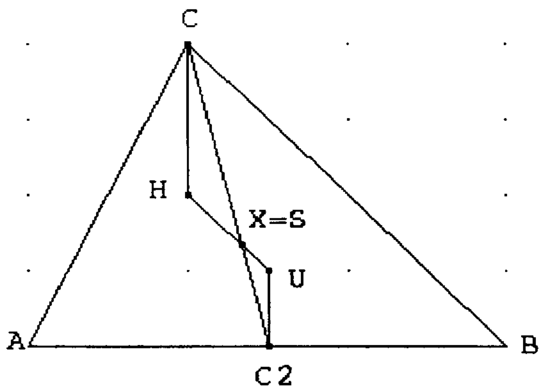


Abb. 8: Die ähnlichen Dreiecke CHX und UC_2X

Da $HC \parallel UC_2$ ist, stimmen die Dreiecke HCX und UC_2X in allen drei Winkeln überein, und sind daher ähnlich.

Die Strecke HC hat im Dreieck $A_1B_1C_1$ dieselbe Bedeutung wie die Strecke UC_2 im Dreieck ABC. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $A_1B_1C_1$ und ABC (siehe Schritt 3) folgt daher, dass $\overline{HC} = 2 \cdot \overline{UC_2}$ ist.

Also ist auch $\overline{XH} = 2 \cdot \overline{XU}$ und $\overline{XC} = 2 \cdot \overline{XC_2}$. Letzteres bedeutet aber, dass X = S sein muss (siehe Schritt 4).

Daraus folgt nun, dass Umkreismittelpunkt U, Schwerpunkt S und Höhenschnittpunkt H auf einer gemeinsamen Geraden liegen, und dass S die Strecke HU innen im Verhältnis 2:1 teilt. Man nennt diese Gerade **die eulersche Gerade** des Dreiecks.

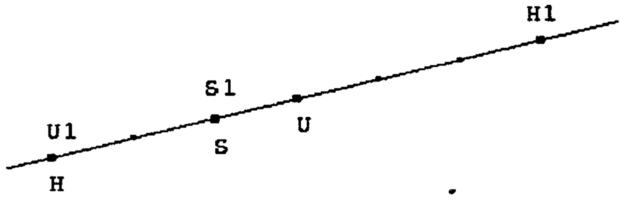


Abb 9: Lage der Punkte U, H, S und U_1, H_1, S_1

Für das Außendreieck $A_1B_1C_1$ von ABC gilt $U_1 = H$ und $S_1 = S$ (siehe Schritt 3 und 4). Daher haben ABC und $A_1B_1C_1$ dieselbe eulersche Gerade, und die Lage des Höhenschnitt punkts H_1 von $A_1B_1C_1$ ist durch die Beziehung $\overline{H_1S} = 2 \cdot \overline{SU_1}$ festgelegt.

In diesem Schritt soll erkannt werden,

- dass die Trägergeraden von h_c, m_{AB} und s_c unter der Bedingung $\overline{AC} = \overline{BC}$ zusammenfallen, und ansonsten drei voneinander verschiedene Geraden sind,
- dass in jedem gleichseitigen Dreieck U = H = S ist,
- dass in jedem nicht-gleichseitigen Dreieck U, H und S drei voneinander verschiedene Punkte einer Geraden sind (= eulersche Gerade des Dreiecks ABC), wobei S die Strecke HU im Verhältnis 2:1 teilt,
- und dass ein Dreieck ABC und sein Außendreieck $A_1B_1C_1$ dieselbe eulersche Gerade besitzen (wobei $S_1 = S$, $U_1 = H$, und U der Mittelpunkt der Strecke HH_1 ist).

6. Das Mittendreieck $A_2B_2C_2$

Arbeitsauftrag 10:
Konstruiere ein Dreieck ABC. Verbinden der Mittelpunkte der Dreiecksseiten BC, AC, AB ergibt das sogenannte Mittendreieck $A_2B_2C_2$.

In welcher Beziehung steht das Dreieck ABC zum Dreieck $A_2B_2C_2$?
Wo liegen der Umkreismittelpunkt U_2, der Höhenschnittpunkt H_2 und der Schwerpunkt S_2 des Dreiecks $A_2B_2C_2$?

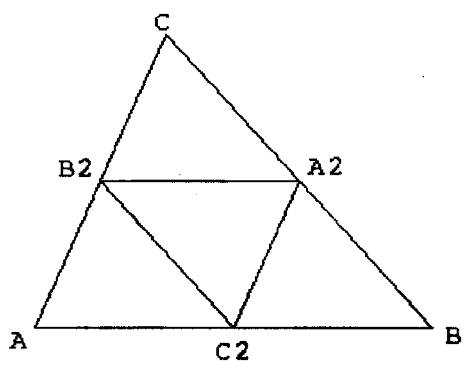
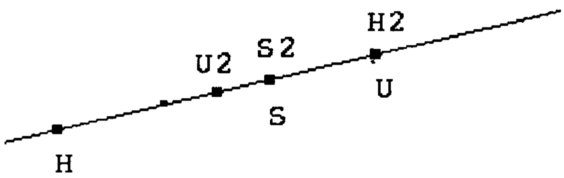


Abb. 10: Dreieck ABC und Mittendreieck $A_2B_2C_2$

Wiederum folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke B_2A_2C und ABC, dass AB || B_2A_2 und dass $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{B_2A_2}$ ist. Analog dazu ist auch AC || A_2C_2 und BC || B_2C_2 .

Die Dreiecke $A_2B_2C_2$ und ABC sind also zueinander ähnlich, wobei entsprechende Seitenpaare parallel zueinander liegen und die Längen einander entsprechender Strecken im Verhältnis 1:2 stehen.

Insbesondere ist ABC das Außendreieck von $A_2B_2C_2$. Da jedes Dreieck denselben Schwerpunkt und dieselbe eulersche Gerade wie sein Außendreieck hat (siehe Schritt 4 und Schritt 6) und außerdem der Höhenschnittpunkt jedes Dreiecks mit dem Umkreismittelpunkt seines Außendreiecks zusammenfällt (siehe Schritt 3), folgt für die Lage der Punkte H_2, S_2 und U_2:



$H_2 = U$
$S_2 = S$
U_2 = Mittelpunkt der Strecke UH

Abb. 11: Lage der Punkte H_2, S_2 und U_2 auf der gemeinsamen eulerschen Geraden von ABC, $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$

In diesem Schritt soll also begründet werden,

- dass jedes Dreieck zu seinem Mittendreieck ähnlich ist, wobei einander entsprechende Seiten paarweise parallel liegen und die Längen einander entsprechender Strecken sich wie 2:1 verhalten,
- dass jedes Dreieck als Außendreieck seines Mittendreiecks aufgefasst werden kann,
- und dass daher Dreieck und Mittendreieck gemeinsame Schwerlinien, einen gemeinsamen Schwerpunkt und eine gemeinsame eulersche Gerade besitzen.

7. Die Mittelpunkte der Strecken AH, BH und CH

Arbeitsauftrag 11:
Konstruiere ein Dreieck ABC, seinen Höhenschnittpunkt H sowie die Mittelpunkte A_3, B_3 und C_3 der Strecken AH, BH und CH.

Welche Zusammenhänge zwischen den Dreiecken ABC und $A_3B_3C_3$ bzw. zwischen den Dreiecken $A_2B_2C_2$ und $A_3B_3C_3$ fallen dir auf? Wo liegen der Umkreismittelpunkt U_3, der Höhenschnittpunkt H_3 und der Schwerpunkt S_3 des Dreiecks $A_3B_3C_3$?

Welche Bedeutung kommt den Punkten A_3, B_3, C_3 in den Dreiecken AC_2B_2, C_2BA_2 bzw. B_2A_2C zu?

Die Dreiecke C_3HB_3 und CHB sind zueinander ähnlich mit Längenverhältnis 1:2 (da $\overline{CH} = 2 \cdot \overline{C_3H}$, $\overline{BH} = 2 \cdot \overline{B_3H}$ und $\angle C_3HB_3 = \angle CHB$ ist). Daher ist $\overline{CB} = 2 \cdot \overline{C_3B_3}$ und $CB \parallel C_3B_3$.

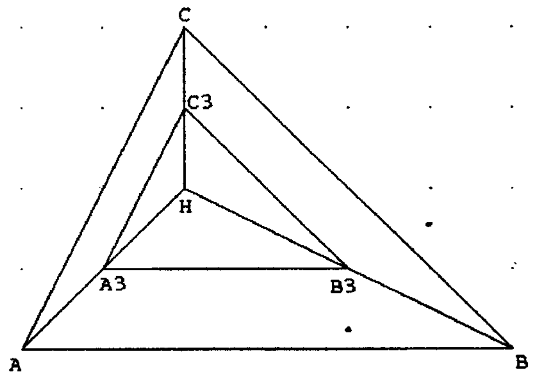


Abb.12: Das Dreieck $A_3B_3C_3$

Analog dazu erhält man, dass
$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{A_3B_3}$ und AB || A_3B_3 sowie dass
$\overline{AC} = \overline{A_3C_3}$ und AC || A_3C_3 ist.

Somit sind die Dreiecke $A_3B_3C_3$ und ABC zueinander ähnlich mit Längenverhältnis 1:2 und paarweise parallel liegenden Seiten.

Außerdem hat $A_3B_3C_3$ dieselben Höhenlinien wie ABC, und es ist $H_3 = H$.

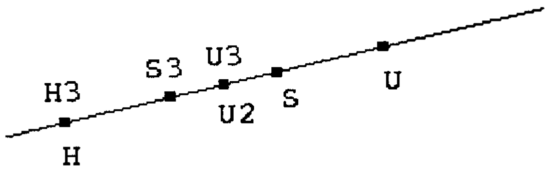


Abb.13: Die Lage der Punkte U_3, H_3 und S_3

Für je zwei einander entsprechenden Punkte X_3 und X der ähnlichen Dreiecke $A_3B_3C_3$ und ABC gilt: X_3 ist der Mittelpunkt der Strecke HX. Daher ist insbesondere S_3 der Mittelpunkt der Strecke HS, und weiters ist $U_3 = U_2$.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $A_3B_3C_3$ und ABC mit Längenverhältnis 1:2 folgt außerdem die Kongruenz der Dreiecke $A_3B_3C_3$ und $A_2B_2C_2$. Daher sind insbesondere die Umkreisradien von $A_3B_3C_3$ und $A_2B_2C_2$ gleich groß. Also haben diese beiden Dreiecke nicht nur einen gemeinsamen Umkreismittelpunkt, sondern sogar einen gemeinsamen Umkreis.
Da die Seiten der Dreiecke $A_2B_2C_2$ und $A_3B_3C_3$ paarweise parallel zueinander liegen, und $U_3 = U_2$ ist, haben diese Dreiecke außerdem auch gemeinsame Seitensymmetralen.

Auch die Dreiecke B_2A_2C und ABC sind zueinander ähnlich mit paarweise parallel liegenden Seiten und Längenverhältnis 1:2. Jedem Punkt X des Dreiecks ABC entspricht im Dreieck B_2A_2C der Mittelpunkt der Strecke XC. Insbesondere entspricht daher dem Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABC im Dreieck B_2A_2C der Punkt C_3. Also ist C_3 der Höhenschnittpunkt von B_2A_2C, und analog dazu sind A_2 und B_2 die Höhenschnittpunkte der beiden Dreiecke AC_2B_2 und C_2BA_2.

In diesem Schritt kann erkannt und begründet werden,

- dass die Mittelpunkte A_3, B_3, C_3 der Strecken AH, BH und CH Eckpunkte eines Dreiecks sind, das zu ABC ähnlich mit Längenverhältnis 1:2 und zu $A_2B_2C_2$ kongruent ist (wobei einander entsprechende Seiten parallel liegen),
- dass das Dreieck $A_3B_3C_3$ dieselbe eulersche Gerade wie die Dreiecke ABC, $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ besitzt,
- dass das Dreieck $A_3B_3C_3$ dieselben Höhenlinien und denselben Höhenschnittpunkt wie ABC hat,

- dass das Dreiecke $A_3B_3C_3$ dieselben Seitensymmetralen, denselben Umkreismittelpunkt und denselben Umkreis wie $A_2B_2C_2$ hat,
- und dass die Punkte A_3, B_3 und C_3 die Höhenschnittpunkte der Dreiecke AC_2B_2, C_2BA_2 und B_2A_2C sind.

8. Der Feuerbachkreis des Dreiecks ABC

Arbeitsauftrag 12:
Konstruiere ein nicht-gleichseitiges Dreieck ABC und seine Höhenlinien. Zeichne auch die Punkte A_2, B_2, C_2, A_3, B_3 und C_3 sowie den gemeinsamen Umkreis der Dreiecke $A_2B_2C_2$ und $A_3B_3C_3$.

In welchen Punkten schneidet dieser Kreis die Trägergeraden der Seiten des Dreiecks ABC? Welche besondere Lage haben die Strecken A_2A_3, B_2B_3 bzw. C_2C_3 bezüglich dieses Kreises?

Die parallelen Geraden h_c und m_{AB} stehen auf die Trägergerade der Seite c normal und schneiden diese in den Punkten H_c bzw. C_2. Daher liegt die Streckensymmetrale von H_cC_2 zu den Geraden h_c und m_{AB} parallel und verläuft durch den Mittelpunkt U_2 der Punkte U und H.

Da also H_c und C_2 von U_2 gleich weit entfernt sind, liegt auch H_c (und analog dazu H_a und H_b) auf dem Umkreis des Dreiecks $A_2B_2C_2$.

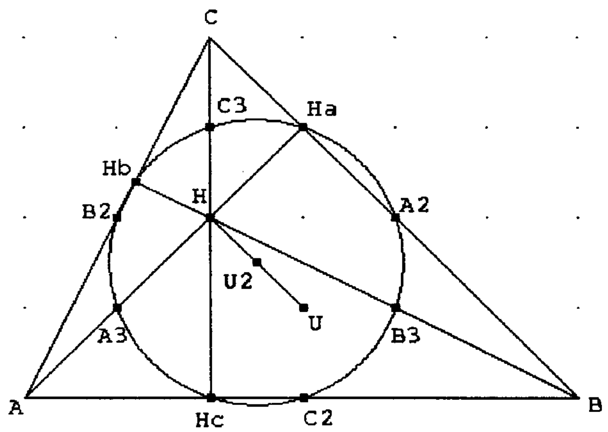


Abb.14: Der Feuerbachkreis von Dreieck ABC

Dieser Kreis, der durch neun besondere Punkte des Dreiecks ABC verläuft, wird als **Feuerbachkreis** (oder auch als Neunpunktekreis) des Dreiecks ABC bezeichnet. Er hat noch viele weitere bemerkenswerte Eigenschaften, so berührt er etwa den Inkreis und auch jeden der drei Ankreise des Dreiecks ABC.

In diesem Schritt soll begründet werden,

- dass der gemeinsame Umkreis der Dreiecke $A_2B_2C_2$ und $A_3B_3C_3$ auch mit dem Umkreis des Höhenfußpunktdreiecks $H_aH_bH_c$ zusammenfällt (= Feuerbachkreis des Dreiecks ABC).
- und dass die Strecken A_2A_3, B_2B_3 und C_2C_3 Durchmesser des Feuerbachkreises des Dreiecks ABC sind.

9. Spiegelung von H an den Trägergeraden der Dreiecksseiten

Arbeitsauftrag 13:
Konstruiere ein beliebiges Dreieck ABC und seinen Umkreis!
Durch Spiegelung des Höhenschnittpunkts H an den drei Dreiecksseiten erhältst du drei Punkte H_A, H_B und H_C.
Welche besondere Lage nehmen diese Punkte ein? Begründe deine Vermutung mit Hilfe ähnlicher Dreiecke!

Für die Spiegelpunkte H_A, H_B und H_C von H gilt: $\overline{HH_A} = 2 \cdot \overline{HH_a}$, $\overline{HH_B} = 2 \cdot \overline{HH_b}$ und $\overline{HH_C} = 2 \cdot \overline{HH_c}$. Daher sind die Dreiecke H_cHH_a und H_CHH_A (bzw. H_bHH_a und H_BHH_A bzw. H_cHH_b und H_CHH_B) zueinander ähnlich mit Längenverhältnis 1:2, und die Seiten dieser ähnlichen Dreiecke liegen paarweise parallel.

Daraus folgt aber, dass auch die Dreiecke $H_aH_bH_c$ und $H_AH_BH_C$ zueinander ähnlich mit paarweise parallel liegenden Seiten sind, und dass sich entsprechende Längen dieser Dreiecke ebenfalls wie 1: 2 verhalten.

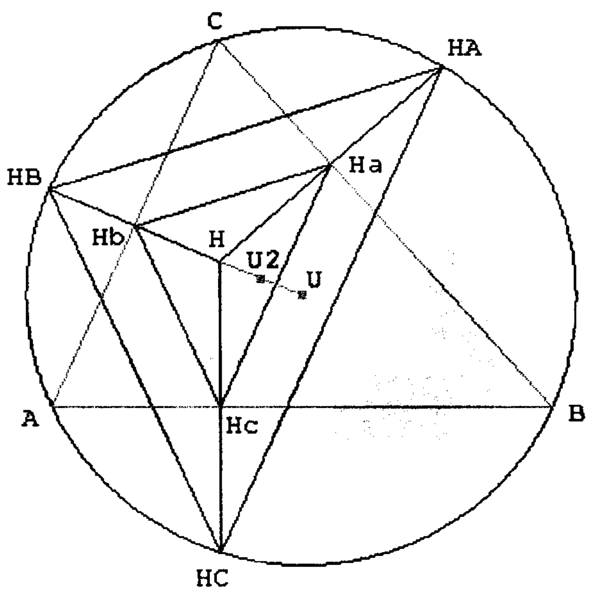


Abb. 15: Spiegelt man H an den Seiten des Dreiecks, so liegen die gespiegelten Punkte H_A, H_B, H_C auf dem Umkreis.

Nach Schritt 8 unserer Aufgabensequenz ist U_2 der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $H_aH_bH_c$, und nach Schritt 6 ist U_2 der Mittelpunkt der Strecke HU.

Jedem Punkt X des Dreiecks $H_AH_BH_C$ entspricht im ähnlichen Dreieck $H_aH_bH_c$ der Mittelpunkt der Strecke HX. Insbesondere hat daher U im Dreieck $H_AH_BH_C$ dieselbe Bedeutung wie U_2 im Dreieck $H_aH_bH_c$. Somit liegen die Punkte H_A, H_B und H_C auf dem Umkreis des Dreiecks ABC.

In diesem Schritt geht es um die Begründung der folgenden Dreieckseigenschaften:

- Spiegelt man den Höhenschnittpunkt eines Dreiecks an den Trägergeraden der Seiten, so liegen die gespiegelten Punkte H_A, H_B und H_C auf dem Umkreis des Dreiecks.
- Das Dreieck $H_AH_BH_C$ der gespiegelten Punkte ist zum Höhenfußpunktdreieck ähnlich mit Längenverhältnis 2:1 und paarweise parallel liegenden Seiten.

10. Spiegelung von U an den Trägergeraden der Dreiecksseiten

Arbeitsauftrag 14:
Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC, den Umkreismittelpunkt U und das zugehörige Mittendreieck $A_2B_2C_2$. Durch Spiegelung von U an den drei Dreiecksseiten erhältst du drei Punkte A_4, B_4 und C_4.

Welche Zusammenhänge zwischen den Dreiecken $A_4B_4C_4$ und $A_2B_2C_2$ bzw. zwischen $A_4B_4C_4$ und ABC kannst du erkennen? Welche Bedeutung kommt den Punkten A_2, B_2 C_2, welche den Punkten A_3, B_3, C_3 im Dreieck $A_4B_4C_4$ zu?

Welche Lage haben die Höhenlinien, die Seitensymmetralen und die Schwerlinien des Dreiecks $A_4B_4C_4$? Welche Lage haben der Umkreismittelpunkt U_4, der Höhenschnittpunkt H_4 und der Schwerpunkt S_4 des Dreiecks $A_4B_4C_4$? Welche Lage haben die eulersche Gerade bzw. der Feuerbachkreis des Dreiecks $A_4B_4C_4$?

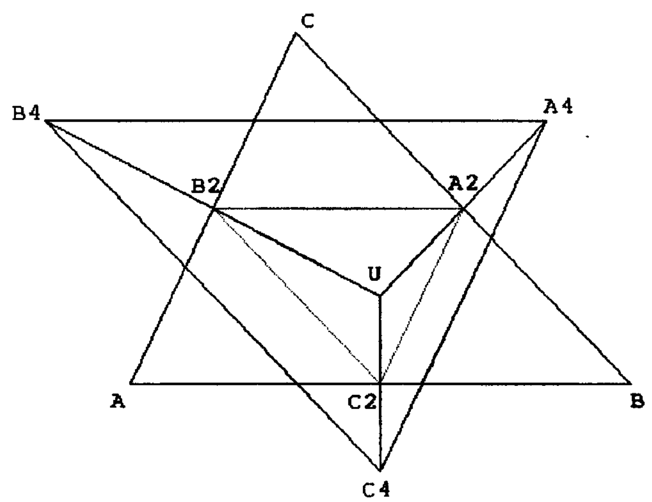


Abb. 16: Die Dreiecke ABC, $A_2B_2C_2$ und $A_4B_4C_4$

Wiederum folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke C_2UA_2 und C_4UA_4, dass $A_4C_4 \parallel A_2C_2 \parallel AC$ und dass $\overline{A_4C_4} = 2 \cdot \overline{A_2C_2} = \overline{AC}$ ist.

Analog dazu ist auch $A_4B_4 \parallel A_2B_2 \parallel AB$ und $B_4C_4 \parallel B_2C_2 \parallel BC$.
Also liegen die Seiten der Dreiecke ABC, $A_2B_2C_2$ und $A_4B_4C_4$ paarweise parallel, und es ist $A_4B_4C_4$ ist zu $A_2B_2C_2$ ähnlich mit Längenverhältnis 2:1 und zu ABC kongruent.

Die Seitensymmetralen des Dreiecks ABC verlaufen durch die Eckpunkte von $A_4B_4C_4$ und stehen auf die Seiten dieses Dreiecks normal. Sie sind daher gleichzeitig die Höhenlinien des Dreiecks $A_4B_4C_4$, und U muss der Höhenschnittpunkt dieses Dreiecks sein.

Daraus folgt außerdem, dass im Dreieck $A_4B_4C_4$ die Mittelpunkte zwischen Eckpunkten und Höhenschnittpunkt mit den Punkten A_2, B_2 und C_2 zusammenfallen: Somit hat das Mittendreieck $A_2B_2C_2$ von ABC im Dreieck $A_4B_4C_4$ dieselbe Bedeutung wie das Dreieck $A_3B_3C_3$ für ABC.

Insbesondere ist daher der Umkreis des Dreiecks $A_2B_2C_2$ gemeinsamer Feuerbachkreis der Dreiecke ABC und $A_4B_4C_4$.

Der Mittelpunkt U_2 dieses gemeinsamen Feuerbachkreises (siehe Schritt 7) muss demnach gemeinsamer Mittelpunkt der Strecken UH und U_4H_4 sein. Aus $H_4 = U$ folgt somit, dass $U_4 = H$ ist.

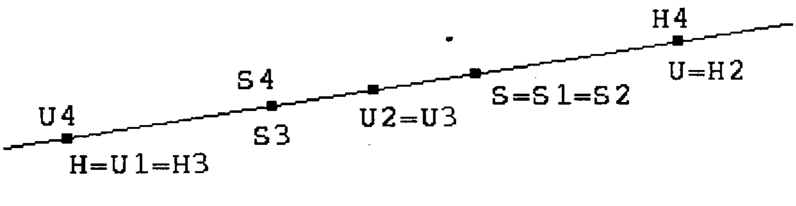
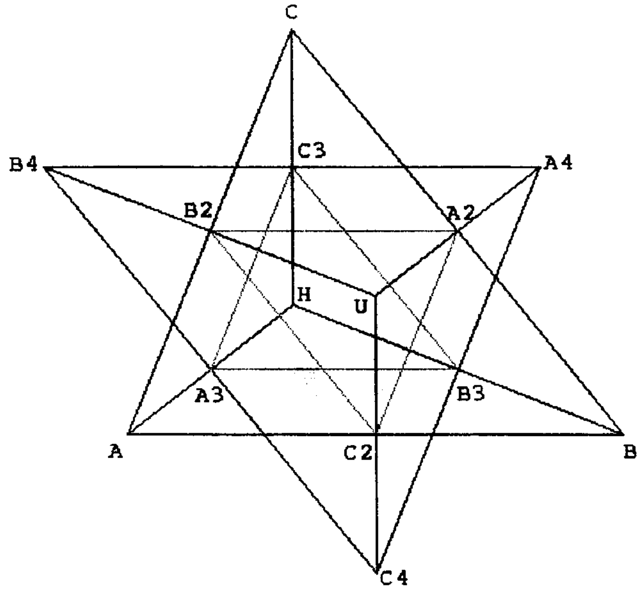


Abb. 17: Lage der Punkte U_4, H_4 und S_4 auf der gemeinsamen eulerschen Geraden von $A_4B_4C_4$, $A_3B_3C_3$, $A_2B_2C_2$, $A_1B_1C_1$ und ABC

Da also $H_4 = U$ und $U_4 = H$ ist, hat Dreieck $A_4B_4C_4$ dieselbe eulersche Gerade wie die Dreiecke ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ und $A_3B_3C_3$, und die Lage von S_4 ist durch die Beziehung $\overline{S_4H_4} = 2 \cdot \overline{S_4U_4}$ (siehe Schritt 5) bestimmt. Abb. 17 zeigt die Lage der Punkte H_4, S_4 und U_4 auf dieser eulerschen Geraden: Insbesondere fällt dabei auf, dass Dreieck $A_4B_4C_4$ mit ABC gemeinsamen Feuerbachkreismittelpunkt, mit $A_1B_1C_1$ gemeinsamen Umkreismittelpunkt, mit $A_2B_2C_2$ gemeinsamen Höhenschnittpunkt, und mit $A_3B_3C_3$ gemeinsamen Schwerpunkt hat.

Die Seiten der vier Dreiecke ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ und $A_4B_4C_4$ liegen paarweise parallel. Sind aber die Seiten zweier Dreiecke paarweise parallel, so ist auch jede Seitensymmetrale (bzw. Schwerlinie bzw. Höhenlinie) des einen Dreiecks zu einer Seitensymmetrale (bzw. Schwerlinie bzw. Höhenlinie) des anderen Dreiecks parallel. Aus den Beziehungen $U_4 = U_1$, $H_4 = H_2$ und $S_4 = S_3$, folgt daher außerdem, dass $A_4B_4C_4$ mit dem Dreieck $A_1B_1C_1$ gemeinsame Seitensymmetralen, mit dem Dreieck $A_2B_2C_2$ gemeinsame Höhenlinien und mit dem Dreieck $A_3B_3C_3$ gemeinsame Schwerlinien hat.



Da $U_4 = H$ ist, erhält man weiters, dass die Seitensymmetralen des Dreiecks $A_4B_4C_4$ mit den Höhenlinien von ABC zusammenfallen. Aus der Kongruenz der Dreiecke ABC und $A_4B_4C_4$ folgt außerdem, dass die Punkte A_3, B_3 und C_3 die Seitenmittelpunkte des Dreiecks $A_4B_4C_4$ sind.

Abb. 18: Die Dreiecke ABC, $A_2B_2C_2$, A_3B_3C3 und $A_4B_4C_4$

Arbeitsauftrag 15:
Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC, das zugehörige Außendreieck $A_1B_1C_1$ und das Dreieck $A_4B_4C_4$.

Welche Bedeutung kommt den Punkten A_4, B_4 und C_4 in den Dreiecken BAC_1, BA_1C, B_1AC zu? Welche Bedeutung kommt den Punkten A_4, B_4 und C_4 in den Dreiecken BCH, ACH und ABH zu? Welche Bedeutung kommt, umgekehrt, den Punkten A, B, C in den Dreiecken B_4C_4U, A_4C_4U bzw. A_4B_4U zu?

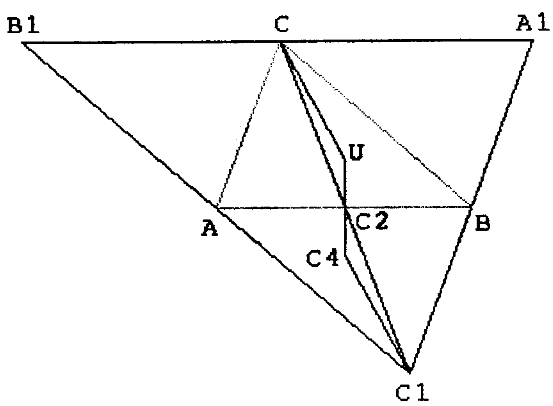


Abb. 19: Die kongruenten Dreiecke $C_4C_2C_1$ und C_2UC

Die Dreiecke $C_4C_2C_1$ und C_2UC sind nach dem SWS-Satz zueinander kongruent (es ist $\overline{C_4C_2} = \overline{C_2U}$ und $\overline{C_2C_1} = \overline{C_2C}$). Daher ist $\overline{C_4C_1} = \overline{UC}$ = r, wobei r den Umkreisradius des Dreiecks ABC bezeichnet.

Da C_4 und U symmetrisch bezüglich der Dreiecksseite AB liegen, ist auch $\overline{C_4A} = \overline{UA}$ = r und $\overline{C_4B} = \overline{UB}$ = r.

Der Punkt C_4 hat also von den drei Punkten A, B und C_1 denselben Abstand r, und ist damit der Umkreismittelpunkt des Dreiecks BAC_1. Analog dazu ist A_4 der Umkreismittelpunkt des Dreiecks BA_1C, und B_4 der Umkreismittelpunkt von B_1AC.

Da der Strecke C_4H des Dreiecks $A_4B_4C_4$ im kongruenten Dreieck ABC die gleich lange Strecke CU entspricht, gilt auch $\overline{C_4H} = \overline{CU}$ = r. Folglich liegt H ebenfalls auf dem Umkreis des Dreiecks BAC_1,d.h. die Dreiecke BAC_1 und ABH haben einen gemeinsamen Umkreis mit Mittelpunkt C_4. Dieser Umkreis ist gleich groß ist wie jener des Dreiecks ABC.

Analog dazu ist A_4 der Mittelpunkt des gemeinsamen Umkreises des Dreiecke BCH und BA_1C, und B_4 ist Mittelpunkt des gemeinsamen Umkreises der Dreiecke ACH und B_1AC, und auch diese Umkreise haben denselben Radius r.

Da also insbesondere $\overline{AB_4} = \overline{AC_4} = r = \overline{AU}$ ist, folgt außerdem, dass A der Umkreismittelpunkt des Dreiecks B_4C_4U ist. Genauso sind auch B und C die Umkreismittelpunkte der Dreiecke A_4C_4U und A_4B_4U, und auch die Umkreise dieser Dreiecke haben den Radius r.

In diesem Schritt soll erkannt und begründet werden, dass man durch Spiegelung des Umkreismittelpunktes U eines Dreiecks ABC an den Trägergeraden der drei Dreiecksseiten ein Dreieck $A_4B_4C_4$ erhält, das

- zum Dreieck ABC kongruent ist, wobei einander entsprechende Seitenpaare parallel liegen,
- dass U der Höhenschnittpunkt und H der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $A_4B_4C_4$ ist,
- dass $A_3B_3C_3$ das Mittendreieck von Dreieck $A_4B_4C_4$ ist,
- dass die Punkte A_2, B_2, C_2 im Dreieck $A_4B_4C_4$ dieselbe Bedeutung haben wie A_3, B_3, C_3 im Dreieck ABC,
- dass die Dreiecke $A_4B_4C_4$ und ABC einen gemeinsamen Feuerbachkreis haben,
- dass die Dreiecke $A_4B_4C_4$ und $A_1B_1C_1$ gemeinsame Seitensymmetralen und einen gemeinsamen Umkreismittelpunkt haben,
- dass die Dreiecke $A_4B_4C_4$ und $A_2B_2C_2$ gemeinsame Höhenlinien und einen gemeinsamen Höhenschnittpunkt haben,
- dass die Dreiecke $A_4B_4C_4$ und $A_3B_3C_3$ gemeinsame Schwerlinien und einen gemeinsamen Schwerpunkt haben,
- dass die eulerschen Geraden der vier Dreiecke ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ und $A_4B_4C_4$ zusammenfallen,
- dass die Punkte A_4, B_4 und C_4 die Umkreismittelpunkte der Dreiecke A_1CB, CB_1A und BAC_1 und auch der Dreiecke BCH, ACH und ABH sind, wobei alle diese Umkreise gleich großen Radius r haben wie der Umkreis des Dreiecks ABC,
- und dass umgekehrt die Punkte A, B und C die Umkreismittelpunkte der Dreiecke B_4C_4U, A_4C_4U und A_4B_4U sind, und dass auch diese Umkreise den Radius r haben.

11. Die Dreiecke ABH, BCH und ACH

Arbeitsauftrag 16:
Zeichne ein nicht-rechtwinkeliges Dreieck ABC sowie seinen Höhenschnittpunkt H. Die Punkte A, B, C und H legen vier Dreiecke ABC, ABH, BCH und CAH fest.
Bestimme die Höhenschnittpunkte dieser Dreiecke. Was fällt dir dabei auf?

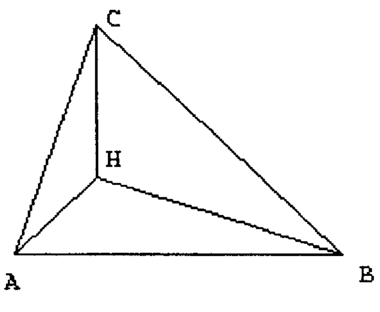


Abb. 20: Dreiecke ABH, BCH und ACH

Ist ABC ein rechtwinkeliges Dreieck, so fallen zwei Höhenlinien mit den Trägergeraden von Dreiecksseiten zusammen, und der Höhenschnittpunkt H liegt in einem Eckpunkt des Dreiecks. Für alle nicht-rechtwinkeligen Dreiecke dagegen sind A, B, C und H vier voneinander verschiedene Punkte und legen daher vier Dreiecke ABC, ABH, BCH und CAH fest (siehe Abb. 20).

Diese Dreiecke haben die interessante Eigenschaft, dass jeweils einer der Punkte A, B, C und H der Höhenschnittpunkt des aus den übrigen drei Punkten gebildeten Dreiecks ist. (Diese Eigenschaft folgt unmittelbar aus der Definition des Begriffs Höhenlinie.) Man sagt, die Punkte A, B, C und H bilden ein **orthozentrisches System**.

Orthozentrische Systeme haben aber noch weitere interessante Eigenschaften:

Arbeitsauftrag 17:
Konstruiere ein nicht-rechtwinkeliges Dreieck ABC und seinen Höhenschnittpunkt H.

Bestimme die Seitenmittelpunkte, die Höhenfußpunkte und die Feuerbachkreise der vier Dreiecke ABC, ABH, BCH und CAH. Was fällt dir auf?
Welche Lage haben die eulerschen Geraden der vier Dreiecke ABC, ABH, BCH und CAH?

Jedes der vier Dreiecke ABC, ABH, BCH und ABC hat dieselben Höhenfußpunkte H_a, H_b und H_c. Die Seitenmittelpunkte der vier Dreiecke ABC, ABH, BCH und ABC und auch die Mittelpunkte zwischen den Höhenschnittpunkten und den Eckpunkten dieser Dreiecke fallen mit den sechs Punkten A_2, B_2, C_2, A_3, B_3 und C_3 zusammen. Daher haben die vier Dreiecke eines orthozentrischen Systems ein gemeinsames Höhenfußpunktdreieck und einen gemeinsamen Feuerbachkreis.

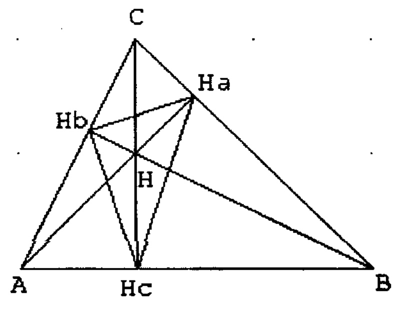


Abb. 21: Gemeinsames Höhenfußpunktdreieck der vier Dreiecke ABC, ABH, BCH und CAH

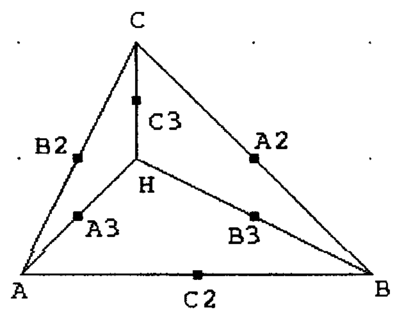


Abb. 22: A_2, B_2, C_2, A_3, B_3 und C_3 sind Punkte des gemeinsamen Feuerbachkreises der vier Dreiecke ABH, BCH, ACH und ABC.

Die eulerschen Gerade des Dreiecks ABH ist durch den Umkreismittelpunkt C_4 und den Höhenschnittpunkt C dieses Dreiecks bestimmt. Analog dazu sind die Trägergeraden der Strecken A_4A, B_4B und UH die eulerschen Geraden der Dreiecke BCH, ACH und ABC. Da außerdem U_2 als Mittelpunkt des gemeinsamen Feuerbachkreises auf allen vier eulerschen Geraden liegt, folgt, dass diese ein Geradenbüschel mit Schnittpunkt U_2 bilden.

Arbeitsauftrag 18:
Konstruiere ein nicht-rechtwinkeliges Dreieck ABC und seinen Höhenschnittpunkt H sowie die Umkreismittelpunkte A4, B4, C4 und U der vier Dreiecke BCH, ACH, ABH und ABC.

Da U der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $A_4B_4C_4$ ist, ist auch $A_4B_4C_4U$ ein orthozentrisches System. Welche Zusammenhänge zwischen den beiden orthozentrischen Systemen ABCH und $A_4B_4C_4U$ fallen dir auf?

Nach Schritt 10 sind die Konfigurationen ABCH und $A_4B_4C_4U$ zueinander kongruent, und entsprechende Streckenpaare liegen zueinander parallel.

Die Punkte A_4, B_4, C_4 und U sind die Umkreismittelpunkte der vier Dreiecke des orthozentrischen Systems ABCH, und umgekehrt sind auch A, B, C und H die Umkreismittelpunkte der vier Dreiecke B_4C_4U, A_4C_4U, A_4B_4U und $A_4B_4C_4$. Insbesondere sind die Umkreise aller dieser Dreiecke gleich groß.

Außerdem hat das orthozentrische System $A_4B_4C_4U$ dieselben vier eulerschen Geraden und denselben Feuerbachkreis wie ABCH.

In diesem Schritt soll für nicht-rechtwinklige Dreiecke ABC begründet werden,

- dass jeweils einer der Punkte A, B, C und H der Höhenschnittpunkt des aus den drei übrigen Punkten gebildeten Dreiecks ist,
- dass die vier Dreiecke ABC, ABH, BCH und CAH ein gemeinsames Höhenfußpunktdreieck und einen gemeinsamen Feuerbachkreis haben,
- dass die vier eulerschen Geraden der Dreiecke BCH, ACH, BCH und ABC einander im Punkt U_2 schneiden,
- dass die vier Umkreismittelpunkte $A_4B_4C_4U$ des orthozentrischen Systems ABCH ebenfalls ein orthozentrisches System bilden, das zu ABCH kongruent ist und zu ABCH parallel liegt,
- dass umgekehrt die Punkte A, B, C und H die Umkreismittelpunkte des orthozentrischen Systems $A_4B_4C_4U$ sind,
- und dass die beiden orthozentrischen Systeme ABCH und $A_4B_4C_4U$ denselben Feuerbachkreis und dieselben vier eulerschen Geraden besitzen.

12. Weitere orthozentrische Systeme

Arbeitsauftrag 19:
Konstruiere ein nicht-rechtwinkeliges Dreieck ABC, sein Mittendreieck $A_2B_2C_2$, den Höhenschnittpunkt H sowie die Schwerpunkte A_5, B_5 und C_5 der Dreiecke BCH, ACH und ABH.

Welcher Zusammenhang zwischen den Dreiecken $A_5B_5C_5$ und $A_2B_2C_2$ bzw. zwischen $A_5B_5C_5$ und ABC fällt dir auf? Welche Bedeutung kommt dem gemeinsamen Schwerpunkt S der Dreiecke $A_2B_2C_2$ und ABC im Dreieck $A_5B_5C_5$ zu?

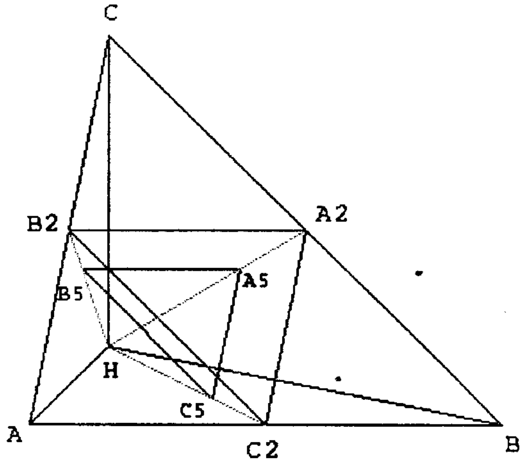


Abb. 23: Die Dreiecke ABC, $A_2B_2C_2$ und $A_5B_5C_5$

Die Schwerpunkte A_5, B_5 und C_5 der Dreiecke BCH, ACH und ABH teilen die Schwerlinien HA_2, HB_2 und HC_2 dieser Dreiecke im Verhältnis 2:1. Daraus folgt, dass die Dreiecke $A_5B_5C_5$ und $A_2B_2C_2$ ähnlich mit Längenverhältnis 2:3 und paarweise parallel liegenden Seiten sind. Insbesondere sind also $A_5B_5C_5$ und ABC ähnliche Dreiecke mit Längenverhältnis 1:3.

Für die einander entsprechenden Punkte H_5 und H_2 der ähnlichen Dreiecke $A_5B_5C_5$ und $A_2B_2C_2$ gilt ebenfalls: H_5 liegt auf der Strecke HH_2 und teilt diese Strecke im Verhältnis 2:1. Daher fällt H_5 mit $S = S_2$ zusammen (siehe Abb. 24).

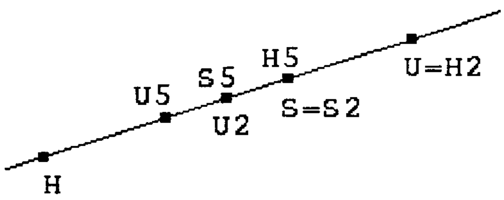


Abb. 24: Lage der Punkte H_5 und U_5

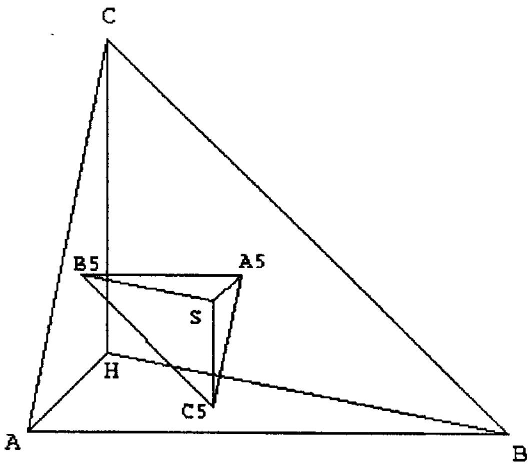


Abb. 25: Das orthozentrische System $A_5B_5C_5S$

Für jedes orthozentrische System ABCH bilden somit auch die Schwerpunkte $A_5B_5C_5S$ der vier Dreiecke BCH, ACH, ABH und ABC ein orthozentrisches System (das zu ABCH ähnlich mit Längenverhältnis 1:3 ist und zu ABCH parallel liegt).

Arbeitsauftrag 20:
Konstruiere ein beliebiges Dreieck ABC und seine Inkreis- und Ankreismittelpunkte I, I_a, I_b und I_c. Begründe, dass auch die Punkte I, I_a, I_b und I_c ein orthozentrisches System bilden.

Welche Bedeutung kommt dem Dreieck ABC, welche dem Umkreis von ABC im orthozentrischen System $II_aI_bI_c$ zu?
Was folgt daraus für den Umkreis des Dreiecks $I_aI_bI_c$: Wie groß ist der Radius dieses Umkreises, und welche Lage hat sein Mittelpunkt?

Da jede Innenwinkelsymmetrale auf die zugehörige Außenwinkelsymmetrale normal steht, sind AI_a, BI_b und CI_c Höhenlinien des Dreiecks $I_aI_bI_c$.

Daraus folgt unmittelbar, dass der Inkreismittelpunkt I des Dreiecks ABC der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $I_aI_bI_c$ ist, und dass A, B und C den Höhenfußpunkten dieses Dreiecks entsprechen.

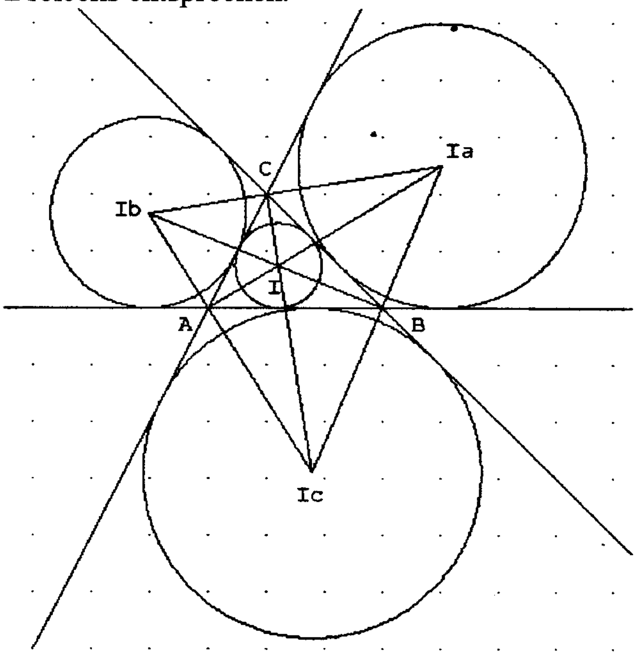


Abb. 26: Das orthozentrische System $II_aI_bI_c$

Daher fällt der Umkreis von ABC mit dem Feuerbachkreis von $I_aI_bI_c$ zusammen, und der Umkreisradius von $I_aI_bI_c$ ist doppelt so groß wie der Umkreisradius von ABC.

In Schritt 8 dieser Sequenz wurde gezeigt, dass der Mittelpunkt des Feuerbachkreises eines Dreiecks der Mittelpunkt von Umkreismittelpunkt und Höhenschnittpunkt dieses Dreiecks ist. Daraus folgt nun umgekehrt, dass der Umkreismittelpunkt von $I_aI_bI_c$ auf der Geraden durch I und U liegt und von I doppelt so weit entfernt ist wie U.

In diesem Schritt soll also erkannt werden,

- dass für jedes orthozentrische System ABCH die Schwerpunkte A_5, B_5, C_5 und S der vier Dreiecke BCH, ACH, ABH und ABC ebenfalls ein orthozentrisches System darstellen,
- und dass für jedes Dreieck ABC die Punkte $II_aI_bI_c$ ein orthozentrisches System mit ABC als gemeinsamem Fußpunktdreieck und dem Umkreis von ABC als gemeinsamem Feuerbachkreis bilden.

Literatur:

Baptist, P., Die Entwicklung der neueren Dreiecksgeometrie. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim (1992).

Johnson, R.A., Advanced Euclidian geometry. Dover publications, New York (1929)

Koth, M., Dreiecke erzeugen Dreiecke. In Mathematik lehren 110, Seite 47-50 (2002)

Renner, C., Planimetrie. Ehrenwirth Verlag, München (1952)

Anschrift der Verfasserin:

Dr. Maria Koth
Institut für Mathematik der Universität Wien
Strudlhofgasse 4, A-1090 Wien